View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by PhyDid - Zeitschriften (FU Berlin)

Geometrische Algebra in höheren Dimensionen

Martin Erik Horn*

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Institut für Didaktik der Physik,
Max-von-Laue-Str. 1, D – 60438 Frankfurt/Main
Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Der Physik-Nobelpreisträger Robert Laughlin fühlt sich nach eigenen Worten „jener Weltanschauung verpflichtet, nach der Mathematik aus experimenteller Beobachtung hervor geht und nicht umgekehrt.” Dürfen wir als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker somit Mathematik gestalten und mathematikdidaktisch wirken? Sollten wir dies vielleicht sogar öfters tun, weil es aufgrund der sachstrukturell engen Beziehung zwischen physikalischer und mathematischer Weltbeschreibung für beide Sichtweisen nützlich und hilfreich sein könnte?
Die physikalisch von Hermann Graßmann motivierte und physikdidaktisch von David Hestenes weiterentwickelte Geometrische Algebra kann nicht nur zur Beschreibung der Physik des dreidimensionalen Raumes bzw. der vierdimensionalen Raumzeit genutzt werden, sondern gestattet eine einfache Erweiterung auf höherdimensionale Räume.
In diesem Beitrag wird gezeigt, wie die Basisvektoren dieser höherdimensionalen Räume unter Nutzung des direkten Produkts von Pauli-Matrizen konstruiert werden können. Damit erhalten dieses auf Zehfuss und Kronecker zurückgehende Produkt und die daraus konstruierten höherdimensionalen Matrizen eine geometrische Bedeutung – und zwar eine aus physikalischen Gründen vermittelte geometrische Bedeutung.

1. Eine Welt in höheren Dimensionen

In populärwissenschaftlichen Büchern äußern sich renommierte Autoren oft sehr euphorisch über die Möglichkeiten, die eine Weltbeschreibung durch höherdimensionale Räume bietet. „There was an intense, exhilarating feeling that we were on the verge of something important,” beschreibt Michio Kaku [20. S. 147] die Stimmung auf einer Konferenz zur Supersymmetrie, auf der „Einstein’s revenge“ [20, S. 136 ff] gefeiert wurde. Und unter der programmatischen Kapitelüberschrift „Beyond the Fourth Dimension“ [21, S. 127 ff] schreibt Kaku zusammen mit Jennifer Thompson: „We now believe that the original expansion of the universe had its origin in a much greater, much more explosive process: the break-down of the ten-dimensional fabric of space-time“ [21, S. 142].

Auch Hawking diskutiert in seiner typisch bildhaften Weise populärwissenschaftlich anschaulich höherdimensionale Welten [10].

Diese Darstellungen spiegeln das große Interesse, das theoretische Physiker Welten mit mehr als vier Dimensionen entgegenbringen, wider. Es stellt sich mithin die Frage, wie dieses Potential, das in solchen Ansätzen liegt, physikdidaktisch erschlossen werden kann. Und damit stellt sich gleichzeitig die Frage, wie mit den für die Darstellung höherdimensionaler Räume notwendigen mathematischen Konzepten im didaktischen Kontext umzugehen ist.

2. Die Sprachlosigkeit zwischen Mathematik und Physik

In einer Zwischenbemerkung zu den mathematischen Kompetenzen aus der Perspektive der Physik stellt C. v. Aufschnaiter zurecht fest, dass derzeit „deutlich widersprüchliche Aussagen z.B. zu Problemlöseschritten oder zu Prozessen des Argumentierens“ durch die Akteure in der Physik- und Mathematikdidaktik gemacht werden [30, S. 46].

Aufschnaiter formuliert ihre Aussage zurückhaltend in Frageform, doch die Intention ist klar: die aus Sicht der Physik notwendigen mathematischen Kompetenzen werden durch die Mathematik nur eingeschränkt vermittelt. Bis diese Sprachlosigkeit zwischen Physik und Mathematik überwunden ist, müssen wir als physikdidaktisch motivierte Akteure die für das Verständnis physikalischer Ansätze notwendigen mathematischen Akzente eigenständig setzen.

Wenn es also unser Ziel ist, moderne physikalische Ansätze physikdidaktisch aufzuarbeiten, um diese vermitteln oder auch nur etwas besser vermitteln zu können, dann kommen wir nicht umhin, mit dieser physikalischen Vermittlung die Aufarbeitung und Vermittlung der entsprechenden mathematischen Grundlagen mit in Angriff zu nehmen.

Indirekt wird dies auch in den anfangs erwähnten populärwissenschaftlichen Darstellungen sichtbar. Sie enthalten bis auf wenige Ausnahmen keine mathematischen Gleichungen. Es ist jedoch beeindruckend, dass die erwähnten Autoren in einem Bereich von dieser Gleichungsabstinenz absehen. Sowohl Hawking [10, S. 57] wie auch Kaku [20, S. 145] & [21, S. 120/121] beschreiben ausführlich und unter zu Hilfenahme der grundlegenden Gleichung

$$a \times b = -\, b \times a \qquad \{1\}$$

die Mathematik der Super-Zahlen bzw. Graßmann-Zahlen. Dies zeigt zweierlei:

- Die Mathematik nichtkommutativer Zusammenhänge ist diesen Physikern zu wichtig, um sie zu übergehen oder aber nur rein verbal zu erläutern.
- Die der nichtkommutativen Algebra zugrunde liegende mathematische Basisgleichung wird als so einfach angesehen, dass sie in populärwissenschaftlichen Darstellungen mathematischen und physikalischen Laien zugemutet werden kann.

Gerade der zweite Punkt deutet auf ein erhebliches didaktisches Potential dieser mathematischen Zugänge hin. Durch ihre Darstellungen unterstützen Hawking und Kaku implizit Parra Serra, der in einem Beitrag schreibt: „Basic Clifford algebra (...) can be explained to the first person you meet in the street“ [25, S. 820].

3. Von drei- zu fünfdimensionalen Räumen

Kernpunkt dieser auf Graßmann [7] und Clifford [3] zurückgehende nichtkommutative Fassung geometrischer Strukturen stellt die von Cartan [2] formulierte und von Hestenes [12], [13] didaktisch fundierte Identifizierung und Nutzung der Pauli-Matrizen als Basisvektoren des dreidimensionalen euklidischen Raums dar:

a) Basisvektor in x-Richtung:

$${}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{2\}$$

b) Basisvektor in y-Richtung:

$${}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \{3\}$$

c) Basisvektor in z-Richtung:

$${}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{4\}$$

Es gelten die üblichen Normierungs- und Orthogonalitätsbedingungen:

$${}_x^2 = {}_y^2 = {}_z^2 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{5\}$$

$$\begin{aligned} {}_x\, {}_y &= -\, {}_y\, {}_x \\ {}_y\, {}_z &= -\, {}_z\, {}_y \\ {}_z\, {}_x &= -\, {}_x\, {}_z \end{aligned} \qquad \{6\}$$

Die $2^3 = 8$ Basiselemente dreidimensionaler Räume (ein Skalar, drei Basisvektoren, drei Basis-Bivektoren und ein Basis-Trivektor) werden somit als komplexe (2x2)-Matrizen dargestellt.

Bei der schulischen Einführung der Geometrischen Algebra werden nur die algebraischen Beziehungen zwischen den Basiselementen betont und problematisiert [17]. Es ist nicht notwendig und aufgrund meist fehlender mathematischer Kenntnisse zur Matrizenrechnung auch kaum in überschaubarer Zeit leistbar, im Physikunterricht der Oberstufe eine Darstellung durch (2x2)-Matrizen lerngruppenorientiert vorzunehmen.

Jedoch bietet diese Darstellungsform einen sehr guten Anknüpfungspunkt für ein hochschulisches Aufgreifen der Geometrischen Algebra, indem Dimensionsbetrachtungen zum Anlass genommen werden, Repräsentationen geometrischer Objekte in Räumen unterschiedlicher Dimension zu diskutieren und sodann mit entsprechenden Matrizen zu verknüpfen. Ein entsprechender kurzer Abriss wird in [19] gegeben, wenn gefragt wird, wie viele unterschiedliche geometrische Elemente in drei- oder höherdimensionalen Räumen notwendigerweise existieren.

Es zeigt sich dabei, dass vierdimensionale Räume wie beispielsweise die Raumzeit durch $2^4 = 16$ unterschiedliche Basiselemente (ein Skalar, vier Basisvektoren, sechs Basis-Bivektoren, vier Basis-Trivektoren und ein Basis-Quadrovektor[*]) modelliert werden können, siehe z. B. [4], [9], [12], [14], [16]. Die vier Basisvektoren können dann mit vier komplexen (4x4)-Matrizen identifiziert werden. Diese Matrizen werden üblicherweise als Dirac-Matrizen bezeichnet.

Allerdings existieren insgesamt 32 linear unabhängige komplexe (4x4)-Matrizen. Die Frage, wie ein fünfdimensionaler Raum durch entsprechende Basismatrizen modelliert werden könnte, führt zu der Schlussfolgerung, dass auch fünfdimensionale Räume mit $2^5 = 32$ unterschiedlichen Basiselementen durch komplexe (4x4)-Matrizen darstellbar sind.

Ein Beispiel für einen solchen fünfdimensionalen Raum kann im Kontext der Kosmologischen Relativität diskutiert werden und führt zu folgender Identifizierung der Dirac-Matrizen mit den Basisvektoren dieses pseudoeuklidischen Raums [18]:

a) Zeitartiger Basisvektor in Zeitrichtung:

$${}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{7\}$$

[*] In intuitiver Kurzbezeichnung werden diese Basiselemente nach Snygg [27, S. 5] auch als 0-Vektor, 1-Vektoren, 2-Vektoren, 3-Vektoren, 4-Vektoren und 5-Vektor bezeichnet.

b) Räumlicher Basisvektor in x-Richtung:

$${}_x = \begin{pmatrix} 0 & {}_x \\ - {}_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{8\}$$

c) Räumlicher Basisvektor in y-Richtung:

$${}_y = \begin{pmatrix} 0 & {}_y \\ - {}_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{9\}$$

d) Räumlicher Basisvektor in z-Richtung:

$${}_z = \begin{pmatrix} 0 & {}_z \\ - {}_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{10\}$$

e) Zeitartiger Basisvektor in eine fünfte Richtung:

$${}_v = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{11\}$$

Zeit- und raumartige Basisvektoren unterscheiden sich durch die Normierungseigenschaften:

$${}_t^2 = - {}_x^2 = - {}_y^2 = - {}_z^2 = {}_v^2$$
$$= \mathbf{1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{12\}$$

Alle Basisvektoren stehen orthogonal zueinander:

$$\begin{aligned} {}_t\,{}_x &= -\,{}_x\,{}_t & {}_t\,{}_y &= -\,{}_y\,{}_t \\ {}_t\,{}_z &= -\,{}_z\,{}_t & {}_t\,{}_v &= -\,{}_v\,{}_t \\ {}_x\,{}_y &= -\,{}_y\,{}_x & {}_x\,{}_z &= -\,{}_z\,{}_x \\ {}_x\,{}_v &= -\,{}_v\,{}_x & {}_y\,{}_z &= -\,{}_z\,{}_y \\ {}_y\,{}_v &= -\,{}_v\,{}_y & {}_z\,{}_v &= -\,{}_v\,{}_z \end{aligned} \qquad \{13\}$$

Wie kann nun die Mathematik dreidimensionaler Räume, die auf komplexen (2x2)-Matrizen beruht, mit der Mathematik vier- und fünfdimensionaler Räume, die auf komplexen (4x4) Matrizen beruht, verknüpft werden? Eine naive Gleichsetzung von Basisvektoren scheidet aus: Eine (2x2)-Matrix kann per Definition nie gleich einer (4x4)-Matrix sein, da nur Matrizen gleicher Spalten- und Zeilenanzahl als identisch angesehen werden können, wenn alle Matrizenelemente übereinstimmen.

Eine einfache, aber nicht unbedingt in jeder Hinsicht überzeugende Lösung bieten Ansätze wie Formel (5.3) aus [9, S. 1193] mit

$$\boldsymbol{i} \equiv {}_t\,{}_x\,{}_y\,{}_z = {}_x\;{}_y\;{}_z \qquad \{14\}$$

oder Formel (5.37) aus [4, S. 135] mit

$${}_{\mathbf{i}} = {}_i\,{}_t \quad \text{mit } i \in \{x, y, z\} \qquad \{15\}$$

Verknüpfungen dieser Art zwischen Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen machen nur dann Sinn, wenn Pauli-Matrizen explizit als komplexe (4x4)-Matrizen formuliert werden. Dann ergeben sich jedoch bei Analyse des Operatorencharakters dieser Matrizen Inkonsistenzen [19, Abschnitt 6], wenn die Reflexionssymmetrie beim Übergang von drei- zu vierdimensionalen Räumen eine andere Manifestation erfährt als beim Übergang von drei- zu fünfdimensionalen Räumen.

Darüber hinaus wird das Ziel dieses Beitrags, höherdimensionale Räume zu beschreiben, unerreichbar, da (4x4)-Matrizen eben nur Raum für die Beschreibung von maximal fünf Dimensionen bieten. Deshalb bietet sich zur Verknüpfung von Pauli- und Dirac-Matrizen ein gänzlich anderes Rezept: Kapern wir die Mathematik des Quanten-Computings!

4. Quantenalgebra im Kontext klassischer Physik: Das Zehfuss-Kronecker-Produkt

Nach [19] ist es aufgrund der Operatoreneigenschaft von Dirac- und Pauli-Matrizen als Generatoren von Reflexionen sinnvoll, die Pauli-Matrizen als Basisvektoren dreidimensionaler Räume mit den Dirac-Matrizen fünfdimensionaler Räume entsprechend Gleichungen [19, Gl. {24} – {26}] zu verknüpfen:

$${}_x \leftrightarrow {}_x\,{}_v\,{}_t = \begin{pmatrix} {}_x & 0 \\ 0 & {}_x \end{pmatrix} \qquad \{16\}$$

$${}_y \leftrightarrow {}_y\,{}_v\,{}_t = \begin{pmatrix} {}_y & 0 \\ 0 & {}_y \end{pmatrix} \qquad \{17\}$$

$${}_z \leftrightarrow {}_z\,{}_v\,{}_t = \begin{pmatrix} {}_z & 0 \\ 0 & {}_z \end{pmatrix} \qquad \{18\}$$

Es wird somit ein Übergang von (2x2)-Matrizen zu (4x4)-Matrizen gesucht, der beispielsweise im Fall der Gleichung {16} lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{19\}$$

Gesucht ist damit eine Art skalarer Multiplikation von Matrizen. Bei der skalaren Multiplikation einer Matrix **A** mit einem Skalar s wird jedes Matrizenelement a_{ij} mit s multipliziert: lautet:

$$\mathbf{A} \otimes s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes (s)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}s & a_{12}s \\ a_{21}s & a_{22}s \end{pmatrix} \qquad \{20\}$$

Ersetzt man das Skalar s durch eine zweite Matrix **B**, ergibt sich die im Kontext des Quanten-Computings üblicherweise als Tensorprodukt bezeichnete Multiplikation, die die beiden (2x2)-Matrizen **A** und **B** so verknüpft, dass eine (4x4)-Matrix entsteht:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{pmatrix} \qquad \{21\}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

(siehe beispielsweise [24, S.83])

„Für unsere Zwecke ist das Tensorprodukt einfach und anschaulich zu handhaben. Aus den Räumen für zwei Quantenbits |x> und |y> mit Basen {|0>, |1>} erhalten wir durch das Tensorprodukt einen Raum für das Register aus diesen beiden Bits," lautet die Erläuterung Homeisters [15, S. 39] für das Vorgehen im Bereich des Quanten-Computings.

Kernpunkt dieser Beschreibung Homeisters ist die Verknüpfung unterschiedlich-dimensionaler Quantenregister mit Hilfe des Tensorprodukts. Dieses Produkt kann jedoch gänzlich aus dem Kontext des Quanten-Computings gelöst und als reines mathematisches Werkzeug zur Generierung höherdimensionaler Räume genutzt werden.

Die Formelbeziehungen {16} bis {18} lassen sich mit Hilfe dieses Verfahrens als Tensorprodukte der (2x2)-Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \mathbf{E}_{(3\text{-dim})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{22\}$$

(siehe Formel {5}) und der Basisvektoren des dreidimensionalen Raums ausdrücken:

$${}_{x}\;{}_{v}\;{}_{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes {}_{x} = \mathbf{1} \otimes {}_{x} \qquad \{23\}$$

$${}_{y}\;{}_{v}\;{}_{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes {}_{y} = \mathbf{1} \otimes {}_{y} \qquad \{24\}$$

$${}_{z}\;{}_{v}\;{}_{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes {}_{z} = \mathbf{1} \otimes {}_{z} \qquad \{25\}$$

Ebenso wird das Skalar und das Pseudoskalar (5-Vektor) des fünfdimensionalen Raums konstruiert:

$$\mathbf{E}_{(5\text{-dim})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \qquad \{26\}$$

$$\mathbf{I}_{(5\text{-dim})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_{(3\text{-dim})} \{27\}$$

Mit Hilfe des Basis-Bivektors

$${}_{z}\;{}_{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{28\}$$

können nun auch die fünf Basisvektoren {7} bis {11} der Kosmologischen Relativität [19] aus den Basisvektoren des dreidimensionalen euklidischen Raums {2} bis {4} konstruiert werden:

$${}_{x} = \begin{pmatrix} 0 & {}_{x} \\ - {}_{x} & 0 \end{pmatrix} = ({}_{z}\;{}_{x}) \otimes {}_{x} \qquad \{29\}$$

$${}_{y} = \begin{pmatrix} 0 & {}_{y} \\ - {}_{y} & 0 \end{pmatrix} = ({}_{z}\;{}_{x}) \otimes {}_{y} \qquad \{30\}$$

$${}_{z} = \begin{pmatrix} 0 & {}_{z} \\ - {}_{z} & 0 \end{pmatrix} = ({}_{z}\;{}_{x}) \otimes {}_{z} \qquad \{31\}$$

$${}_{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = {}_{z} \otimes \mathbf{1} \qquad \{32\}$$

$${}_{v} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = {}_{x} \otimes \mathbf{1} \qquad \{33\}$$

All dies beschreibt Beziehungen zwischen flachen, ungekrümmten Räumen euklidischer bzw. pseudoeuklidischer Struktur. Der hier behandelte dreidimensionale euklidische Raum weist die Signatur (+, +, +) und der fünfdimensionale Raum eine Signatur von (+, –, –, –, +) auf.

Damit erscheint die im Rahmen des Quanten-Computings gewählte Bezeichnung als Tensorprodukt seltsam überzogen. Tensoren sind mathematische Objekte, die sich durch ihre speziellen Transformationseigenschaften auszeichnen. Diese Transformationseigenschaften kommen aber im wesentlichen bei gekrümmten Räumen bzw. krummlinigen Koordinaten zum Tragen und spielen somit eine wesentliche Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Quantentheorie (Quanten-Computing) und Gravitation (Allgemeine Relativitätstheorie) sind bis heute jedoch noch nicht zu einer einheitlichen, konsistenten und übergreifenden Theorie vereinbar. Die Nutzung von Tensoren erfolgt deshalb im Kontext der Quantenmechanik und damit im Kontext des Quanten-Computings physikalisch vollständig unmotiviert, ist mathematisch überflüssig und damit didaktisch fragwürdig.

Die Nutzung des Tensorprodukts im Kontext des Quanten-Computings ist aber auch aus historischen Gründen fragwürdig, denn der wesentliche Kern einer Mathematik des Quanten-Computings wurde schon lange vor der konzeptionellen Entwicklung von Quantenmechanik und Quanten-Computern beschrieben – und zwar im Jahr von 1858 von Johann Georg Zehfuss.

Ins einem Beitrag „Über ein gewisse Determinante“ [32] definiert und erläutert Zehfuss das direkte Produkt zweier Matrizen (siehe Formeln {21} und {37}) schon in allgemeiner Form. Sein Beitrag geriet in Vergessenheit, so dass dieses Produkt in der Literatur heute fälschlicherweise als Kronecker-Produkt bezeichnet wird [11].

Die Eigenschaften des Zehfuss-Kronecker-Produkts sind in [8, Kap. IV, § 5], [28], [29, Kap. 2], [27, Kap. 11] genau in der gleichen Art und Weise aufgeführt wie von den Protagonisten des Quanten-Computings unter der Bezeichnung als „Tensorprodukt“ beispielsweise in [15, Abschnitt 2.7], [24, Kap. 4].

Mit Hilfe der dort aufgeführten Multiplikationsgesetze kann unter anderem überprüft werden, ob die konstruierten Basisvektoren {29} bis {33} mit den Beziehungen {23} bis {27} vereinbar sind. So gilt nach [28, S. 17]

$$\begin{aligned}&(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(A_3 \otimes B_3)\\ &\quad = (A_1 A_2 A_2) \otimes (B_1 B_2 B_3)\end{aligned} \qquad \{34\}$$

Damit kann der Trivektor {23} leicht ermittelt werden:

$$\begin{aligned}{}_x\,{}_v\,{}_t &= ((\ {}_z\ {}_x) \otimes\ {}_x)(\ {}_x \otimes \mathbf{1})(\ {}_z \otimes \mathbf{1})\\ &= (\ {}_z\ {}_x\ {}_x\ {}_z) \otimes\ {}_x \qquad \{35\}\\ &= \mathbf{1} \otimes\ {}_x\end{aligned}$$

In analoger Vorgehensweise lassen sich die Trivektoren {24} und {25} sowie das Pseudoskalar {27} als fünfdimensionales Volumenelement konstruieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{(5\text{-dim})} &= {}_x\,{}_y\,{}_z\,{}_t\,{}_v = -\ {}_x\,{}_v\,{}_t\,{}_y\,{}_z\\ &= -(\mathbf{1} \otimes\ {}_x)((\ {}_z\ {}_x) \otimes\ {}_y)((\ {}_z\ {}_x) \otimes\ {}_z)\\ &= -(\ {}_z\ {}_x\ {}_z\ {}_x) \otimes (\ {}_x\ {}_y\ {}_z) \qquad \{36\}\\ &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_{(3\text{-dim})}\end{aligned}$$

Damit ist ein mathematisch konsistentes Verfahren vorhanden, Größen dreidimensionaler Räume in Größen fünfdimensionaler Räume zu überführen.

5. Generierung höherdimensionaler Räume

Der nächste Schritt stellt die Konstruktion von Räumen mit noch höherer Dimension dar. Dabei wird das Vorgehen bei der Konstruktion von Basiselementen fünfdimensionaler Räume aus den Basisvektoren eines dreidimensionalen Raums mit Hilfe des Zehfuss-Kronecker-Produkts verallgemeinert.

Das Zehfuss-Kronecker-Produkt zweier beliebig dimensionaler Matrizen **A** und **B** ergibt sich zu:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{B}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix} \qquad \{37\}$$

(siehe beispielsweise [15, S. 40])

Da bei dieser Konstruktion rekursiv jeweils immer zwei quadratische Matrizen durch das Zehfuss-Kronecker-Produkt verknüpft werden, erhalten wir wieder eine quadratische Matrix. Eine quadratische (n x n)-Matrix beschreibt dabei immer einen Raum ungeradzahliger Dimension, da insgesamt $2n^2$ unterschiedliche linear unabhängige Basiselemente gebildet werden können, so dass die Dimensionen der konstruierten Räume bzw. Raumzeiten jeweils ungeradzahlig sein wird:

- n = 1 ⇒ Eindimensionaler Raum
  bzw. eindimensionale Zeit

  $2^1 = 2$ linear unabhängige (1x1)-Matrizen (und zwar die dimensionslose Zahl 1 und die imaginäre Einheit i) mit insgesamt 2 · 1 – 1 = 1 Basisvektoren: $\quad \mathrm{i} = {}_{1(1\text{-dim})}$

- n = 2 ⇒ Dreidimensionaler Raum
  bzw. dreidimensionale Raumzeit

  $2^3 = 8$ linear unabhängige (2x2)-Matrizen (Pauli-Matrizen) mit insgesamt 2 · 2 – 1 = 3 Basisvektoren: $\quad {}_x = {}_{1(3\text{-dim})}$, ${}_y = {}_{2(3\text{-dim})}$, ${}_z = {}_{3(3\text{-dim})}$

- n = 4 ⇒ Fünfdimensionaler Raum
  bzw. fünfdimensionale Raumzeit

  $2^5 = 32$ linear unabhängige (4x4)-Matrizen (Dirac-Matrizen) mit insgesamt 2 · 3 – 1 = 5 Basisvektoren:

  $\left.\begin{aligned}{}_x &= {}_{1(5\text{-dim})}\\ {}_y &= {}_{2(5\text{-dim})}\\ {}_z &= {}_{3(5\text{-dim})}\end{aligned}\right\}$ Konstruktion mit Hilfe des Pauli-Bivektors ${}_z\,{}_x$

  $\left.\begin{aligned}{}_t &= {}_{4(5\text{-dim})}\\ {}_v &= {}_{5(5\text{-dim})}\end{aligned}\right\}$ Konstruktion mit Hilfe der Einheitsmatrix **1**

- n = 8 ⇒ Siebendimensionaler Raum
  bzw. siebendimensionale Raumzeit

  $2^7 = 128$ linear unabhängige (8x8)-Matrizen mit insgesamt 2 · 4 – 1 = 7 Basisvektoren:

  $\left.\begin{aligned}&{}_{1(7\text{-dim})}\\ &{}_{2(7\text{-dim})}\\ &{}_{3(7\text{-dim})}\\ &{}_{4(7\text{-dim})}\\ &{}_{5(7\text{-dim})}\end{aligned}\right\}$ Konstruktion mit Hilfe des Pauli-Bivektors ${}_z\,{}_x$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{6(7\text{-dim})} \\ {}_{7(7\text{-dim})} \end{array}\right\}\ \text{Konstruktion mit Hilfe der Einheitsmatrix } \mathbf{1}$$

- . . .
  . . .
- n = 2k+1; $k \in \mathbb{N} \Rightarrow (2n-1)$-dimensionaler Raum bzw. $(2n-1)$-dimensionale Raumzeit
  2^{2n-1} linear unabhängige $(2^{n-1} \text{ x } 2^{n-1})$-Matrizen mit insgesamt $2n-1$ Basisvektoren:

$$\left.\begin{array}{l} {}_{1(2n-1\text{-dim})} \\ {}_{2(2n-1\text{-dim})} \\ {}_{3(2n-1\text{-dim})} \\ \vdots \\ {}_{2n-3(2n-1\text{-dim})} \end{array}\right\}\ \text{Konstruktion mit Hilfe des Pauli-Bivektors } {}_{z}\ {}_{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{2n-2(2n-1\text{-dim})} \\ {}_{2n-1(2n-1\text{-dim})} \end{array}\right\}\ \text{Konstruktion mit Hilfe der Einheitsmatrix } \mathbf{1}$$

In Anlehnung an den ersten Buchstaben der Namen Keller und Carmeli werden im folgenden die höherdimensionalen Basisvektoren mit dem griechischen Buchstaben bezeichnet, da Jaime Keller und Moshe Carmeli beeindruckende Ideen zur Ausgestaltung der Physik höherdimensionaler Räume formulierten.

Die Konstruktion der Basisvektoren einer (2n – 1)-dimensionalen Raumzeit aus den Basisvektoren einer $(2n-3)$-dimensionalen Raumzeit kann in Analogie zu den Formelbeziehungen {29} bis {33} vorgenommen werden:

$$_{i(2n-1\text{-dim})} = \begin{pmatrix} 0 & {}_{i(2n-3\text{-dim})} \\ - {}_{i(2n-3\text{-dim})} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\ {}_{z}\ {}_{x}) \otimes {}_{i(2n-3\text{-dim})} \qquad \{38\}$$

mit i = 1, 2, 3, ..., $2n-3$

$$_{2n-2(2n-1\text{-dim})} = {}_{2n-4(2n-3\text{-dim})} \otimes \mathbf{E}_{(3\text{-dim})}$$

$$= {}_{z} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1} \qquad \{39\}$$

$$_{2n-1(2n-1\text{-dim})} = {}_{2n-3(2n-3\text{-dim})} \otimes \mathbf{E}_{(3\text{-dim})}$$

$$= {}_{x} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1} \qquad \{40\}$$

Die Basisvektoren weisen die üblichen Eigenschaften auf. Sie sind normiert

$$_{i}^{2} = \pm 1 \qquad \{41\}$$

und stehen orthogonal zueinander:

$$_{i}\ {}_{j} = -\ {}_{j}\ {}_{i} \qquad \{42\}$$

Sie spannen ein $(2n-1)$-dimensionales Basis-Hypervolumenelement auf, das als Pseudoskalar agiert

$$\mathbf{I}_{(2n-1\text{-dim})} = \pm\ {}_{1}\ {}_{2}\ {}_{3} \cdots {}_{2n-2}\ {}_{2n-1} \qquad \{43\}$$

und als imaginäre Einheit verwendet werden kann:

$$\mathbf{I}_{(2n-1\text{-dim})}^{2} = -1 \qquad \{44\}$$

Entscheidend sind aus didaktischer Sicht jedoch zwei Eigenschaften: Erstens kann jeder Ortsvektor der nun konstruierten $(2n-1)$-dimensionalen Raumzeit als Linearkombination der Basisvektoren $_{i}$ dargestellt werden (Koordinatenaspekt):

$$\mathbf{r} = x_1\ {}_{1} + x_2\ {}_{2} + x_3\ {}_{3} + \ldots + x_{2n-1}\ {}_{2n-1} \qquad \{45\}$$

Und zweitens können die $_{i}$ gleichzeitig als Basis-Reflexionen interpretiert werden (Operatorenaspekt):

$$\pm\ {}_{i}\, \mathbf{r}\ {}_{i} \qquad \{46\}$$

$$= -x_1\ {}_{1} - x_2\ {}_{2} - \ldots + x_i\ {}_{i} - \ldots - x_{2n-1}\ {}_{2n-1}$$

Damit erfüllt die so vorgenommene Konstruktion der $_{i}$ die zentrale Forderung von Vianna, Trindade und Fernandes: „We share with many authors the idea that operators and operands should be elements of the same space" [31, S. 962]. Die Umsetzung dieser Forderung ist einer der didaktischen Kernpunkte, die die Geometrische Algebra verwirklicht. Sowohl im Bereich der Quantenmechanik wie auch im Bereich der klassischen Physik stellt die Geometrische Algebra deshalb ein konzeptionell überzeugendes Instrument zur Beschreibung höherdimensionaler Räume dar.

6. Die Beziehung zwischen Basisvektoren und Raumstruktur höherdimensionaler Räume

Die drei Pauli-Matrizen {2} bis {4} spannen als Basisvektoren einen rein räumlichen dreidimensionalen Raum ohne Zeitdimension (oder einen rein zeitlichen dreidimensionalen Raum ohne räumliche Dimension) auf, da die Quadrate aller Basisvektoren +1 ergeben (siehe Formel {5}). Somit lautet die Signatur dieses Raums (+, +, +).

Will man jedoch eine dreidimensionale Raumzeit mit einer Raum- und zwei Zeitdimensionen (bzw. zwei Raum- und einer Zeitdimension) beschreiben, benötigt man eine Signatur von (+, –, –). Eine solche Beschreibung gelingt durch eine simple Neuzuordnung der acht Basiselemente, indem zwei beliebige Basisvektoren mit dem dreidimensionalen Volumenelement (oder Pseudoskalar)

$$\mathbf{I}_{(3\text{-dim})} = {}_{x}\ {}_{y}\ {}_{z} \qquad \{47\}$$

und –1 multipliziert werden. Da $\mathbf{I}_{(3\text{-dim})}$ mit allen Basiselementen vertauscht, bleiben die wesentlichen mathematischen Eigenschaften bis auf die Signatur unverändert.

Eine solche Neuzuordnung könnte beispielsweise lauten:

$$\begin{array}{rcl} {}_{xALT} & \rightarrow & {}_{xNEU} \\ -\mathbf{I}_{(3\text{-dim})}\ {}_{yALT} = {}_{xALT}\ {}_{zALT} & \rightarrow & {}_{yNEU} \\ \mathbf{I}_{(3\text{-dim})}\ {}_{zALT} = {}_{xALT}\ {}_{yALT} & \rightarrow & {}_{zNEU} \end{array} \qquad \{48\}$$

Die Quadrierung dieser neuen Basisvektoren belegt, dass die Signatur nun einer gemischten Raumzeit entspricht:

$$\begin{array}{l} {}_{xNEU}^{2} = \mathbf{1} \\ {}_{yNEU}^{2} = {}_{zNEU}^{2} = -\mathbf{1} \end{array} \qquad \{49\}$$

Damit erhalten die alten Basiselemente folgende neue geometrische Bedeutung.

a) Ehemaliges Basisskalar

$$\mathbf{1}_{\mathrm{ALT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{\mathrm{NEU}} \qquad \{50\}$$

Das Basisskalar, also die dimensionslose Zahl **1**, bleibt unverändert und nimmt weiterhin die Funktion der Einheitsmatrix und des neutralen Elements bezüglich der Multiplikation ein.

b) Ehemalige Basisvektoren:

$$_{\mathrm{xALT}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{xNEU}} \qquad \{51\}$$

Die Funktion des Basisvektors in x-Richtung bleibt unverändert. Er dient geometrisch weiterhin zur Beschreibung einer Richtungsangabe.

$$_{\mathrm{yALT}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{xNEU}} \quad _{\mathrm{zNEU}} \qquad \{52\}$$

$$_{\mathrm{zALT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{xNEU}} \quad _{\mathrm{yNEU}} \qquad \{53\}$$

Die Funktion der Basisvektoren in y- und in z-Richtung ändert sich. Diese beiden Pauli-Matrizen werden jetzt als Basis-Bivektoren interpretiert und dienen geometrisch zur Beschreibung zweier Ebenen.

c) Ehemalige Basis-Bivektoren:

$$_{\mathrm{xALT}} \quad _{\mathrm{yALT}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{zNEU}} \qquad \{54\}$$

$$- \quad _{\mathrm{zALT}} \quad _{\mathrm{xALT}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{yNEU}} \qquad \{55\}$$

Die Funktion der Basis-Bivektoren in Richtung der xy- und in Richtung der zx-Ebene ändert sich. Diese beiden Pauli-Matrizen werden jetzt als Basisvektoren interpretiert und dienen geometrisch nicht mehr zur Beschreibung zweier Ebenen, sondern zur Beschreibung von Richtungsangaben.

$$_{\mathrm{yALT}} \quad _{\mathrm{zALT}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{yNEU}} \quad _{\mathrm{zNEU}} \qquad \{56\}$$

Die Funktion des Basis-Bivektors in Richtung der yz-Ebene bleibt unverändert. Diese Pauli-Matrix dient geometrisch weiterhin zur Beschreibung der Richtung der yz-Ebene.

d) Ehemaliger Basis-Trivektor (Pseudoskalar):

$$_{\mathrm{xALT}} \quad _{\mathrm{yALT}} \quad _{\mathrm{zALT}} \qquad \{57\}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \quad _{\mathrm{xNEU}} \quad _{\mathrm{yNEU}} \quad _{\mathrm{zNEU}}$$

Der Basis-Trivektor, also das orientierte dreidimensionale Volumenelement $\mathbf{I}_{(3\text{-dim})}$, bleibt unverändert und nimmt weiterhin die Funktion eines Pseudoskalars ein.

In genau der gleichen Art und Weise können die Signaturen höherdimensionaler Räume beliebig modifiziert werden. Soll beispielsweise die Mathematik der fünfdimensionale Raumzeit, die hier im Kontext der Kosmologischen Relativität Carmelis diskutiert wurde, zur Beschreibung eines Quantenregisters aus 5 Bits mit $2^5 = 32$ verschiedenen Zuständen herangezogen werden, muss die Signatur von (+, +, +, –, –) in (+, +, +, +,+) geändert werden.

Dies gelingt, indem die beiden letzten, quadratisch negativen Basisvektoren mit $\mathbf{I}_{(5\text{-dim})}$ bzw. $-\mathbf{I}_{(5\text{-dim})}$ multipliziert werden. Damit werden zwei zuvor als Quadrovektoren interpretierte Dirac-Matrizen nun als neue Basisvektoren interpretiert.

In einer (2n – 1)-dimensionalen Raumzeit werden Basisvektoren gegebenenfalls entsprechend mit dem Pseudoskalar bzw. (2n – 1)-dimensionalen Basis-Hypervolumenelement $\mathbf{I}_{(2n-1)}$ {43} multipliziert.

7. Eine Nachbemerkung: Zur Epistemologie der Mathematik

Die erstaunliche Sprachlosigkeit zwischen Mathematikdidaktik und Physikdidaktik, die eingangs kurz angeschnitten wurde, kann auch als eine Fortsetzung der allgemeinen Sprachlosigkeit zwischen Fachmathematik und Fachphysik gedeutet werden.

Nur wenige Forscher bringen die Gelassenheit und Souveränität auf, diese mangelnde Kommunikation offen anzusprechen. So schreibt der Fields-Preisträger und ehemalige Präsident der Royal Society Michael F. Atiyah, über die Vermittlung der Clifford-Algebra: „When Singer and I were investigating these questions we 'rediscovered' for ourselves the Dirac operator. Had we been better educated in physics, or had there been the kind of dialogue with physicists that is now common, we would have got there much sooner“ [1, S. 116].

Es gibt also rein pragmatische Gründe, dass wir alle, die Protagonisten aus den Bereichen von Physik und Mathematik, unsere Grenzen überschreiten und das Gespräch mit den Nachbardisziplinen suchen sollten. Gian-Carlo Rota spitzt dies mit der ironischen Bemerkung, dass „Mathematicians have to attend (secretly) physics meetings in order to find out what is going on in their fields” [26, S. 215] in einer teilweise polarisierenden Weise zu. Und das sollte keine Einbahnstraße sein: Wenn wir Physikerinnen und Physiker wirklich wissen wollen, was sich in unserem Bereich so tut, kommen wir nicht umhin, auch auf Mathematikkonferenzen Verknüpfungen zu unserer Disziplin zu suchen.

Doch außer diesem pragmatischen Gründen, die für einen engen Kontakt zwischen Physik und Mathematik spricht, gibt es möglicherweise auch tiefer gehende strukturelle Gründe. Zwar lehnt der Physik-Nobelpreisträger Robert Laughlin spekulative Weltbeschreibungen mit Hilfe höherdimensionaler Räume ab, da er Mathematisierungen sehr konkret an physikalischen Phänomenen vornimmt. Umso radikaler sind jedoch seine epistemologischen Überzeugungen zur Natur der Mathematik, die ihn an das Institute for Complex Adaptive Matter führten, das „jener Weltanschauung verpflichtet (ist), nach der Mathematik aus experimentellen Beobachtungen hervorgeht und nicht umgekehrt“ [22, S. 323].

Dieser – umstrittene – epistemologische Standpunkt führt erst recht zu der Schlussfolgerung, dass wir als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker Mathematik nicht nur deshalb gestalten, weil wir sie als Instrument und Hilfswerkzeug benötigen. Im Gegenteil: die Mathematik ist nach dieser Position integraler Bestandteil der Physik, und zwar nicht dadurch, dass sie in die Physik miteinbezogen wird, sondern alleine aus dem Befund heraus, dass sie aus physikalischen Gegebenheiten heraus ableitbar ist – oder vorsichtiger: prinzipiell ableitbar sein sollte.

Die sachstrukturell engen Beziehungen zwischen Physik und Mathematik sind hiernach eine logische Folge der gegenseitigen Durchdringung.

8. Gedankenspiel und Ausblick: Eine Welt ohne i

Diese enge Verknüpfung zwischen Mathematik und Physik legt auch Einstein dar, wenn er die „praktische“ und die „rein axiomatische“ Geometrie zu verknüpfen sucht. Zu diesem Zwecke muss „die Geometrie dadurch ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden, dass den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet werden. (...) Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten Zweig der Physik betrachten“ [5, S. 5/6].

Was wäre also, wenn wir diesen geometrischen Standpunkt konsequent verfolgen und die Mathematik konsequent geometrisch denken? Meine persönliche Schlussfolgerung, für sicherlich kontrovers zu diskutieren sein wird, ist: Wir würden in einer Welt ohne imaginäre Symbolik, ohne Überbetonung des Zeichens i und ohne die psychologische Scheidung der Welt in Reelles (also Sichtbares) und in Imaginäres (also nur Gedachtes, unserem Kopf Entsprungenes), leben.

Die Funktion von i wird in dieser geometrisch basierten Welt von tatsächlichen (nach Einstein also „praktisch“ geometrischen), real existierenden, sichtbaren mathematischen Objekten wahrgenommen, die auf einer Ebene stehen mit allen anderen „praktisch“ geometrisch definierten Größen.

Die Mathematik bewegt sich unablässig im Spannungsfeld zwischen Algebra und Geometrie. Tendenzen zur Algebraisierung und dagegen einwirkende Tendenzen zur Geometrisierung der Mathematik durchdringen die gesamte Geschichte der Mathematik. Das Symbol i, 1777 von Euler eingeführt [6, S. 236], und die damit verknüpfte Theorie der komplexen Zahlen, sind ein typisches Kind der Algebraisierung (siehe beispielsweise [6, Abschnitt 4.1]. Die imaginäre Einheit i ist im konventionellen Sinne nichts als eine Rechengröße, dazuerfunden, weil dann algebraische Gleichungen und Gleichungssysteme einfacher oder auch sogar erstmalig lösbar werden.

Dagegen fußt die Welt der Geometrisierung im Sinne einer praktischen Geometrik Einsteins auf erlebbaren und erfahrbaren Gegenständen wie Raumrichtungen, Ebenen, Volumina – mathematischen Objekten also, mit denen die Physik sehr konkret, experimentell nachmessend umgeht.

Eine solche praktische Geometrik wurde in den vorangegangenen Abschnitten für höhere Dimensionen beschrieben. Sie beruht auf denn drei Pauli-Matrizen {2} bis {4} als Basisvektoren unserer dreidimensionalen, euklidischen Welt, die mit Hilfe des Zehfuss-Kronecker-Produkts rekursiv höhere Dimensionen erschließen.

Das Seltsame an dieser höherdimensionalen Weltbeschreibung ist allerdings die unterschiedliche Zugänglichkeit ungeradzahliger und geradzahliger Dimensionen. Den Grundpfeiler bilden offenkundig Räume ungeradzahliger Dimension, aus denen dann mit Hilfe eines Zusatzschrittes etwas umständlich die Räume geradzahliger Dimension abgeleitet werden.

Dies stellt in meinen Augen nicht etwa eine naturgegebene Unvermeidlichkeit, sondern einen theoriebedingten ästhetischen Fauxpas dar, der im Folgenden zu korrigieren versucht wird. Dies muss naturgemäß umstritten sein, denn Argumente, die sich auf Schönes und Ästhetisches beziehen, umfassen immer auch subjektive Anteile, da jeder fühlende Mensch Hässlichkeit und Schönheit in einer gänzlich eigenen Weise fühlt und wahrnimmt.

Zur Konstruktion geradzahliger Welten können zwei der drei Pauli-Matrizen als Basisvektoren einer zweidimensionalen Welt gewählt werden. Hier folgt nun die Bifurkation zwischen imaginär und reell. Es erscheint natürlich, die beiden nur mit den reellen Matrixelementen 0, 1 und – 1 belegten Pauli-Matrizen

$$_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{58\}$$

und

$$_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{59\}$$

zu wählen und auf die mit imaginären Belegungen versehene Matrix $_y$ (sie wird uns wiederbegegnen) zu verzichten. Eine solche Unteralgebra der Pauli-Algebra umfasst vier Basiselemente, die neben dem dimensionslosen Skalar

$${}_x^2 = {}_z^2 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \{60\}$$

als viertes Basiselement den Basis-Bivektor

$${}_x\,{}_z = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \{61\}$$

in der Bedeutung einer orientierten Einheitsfläche aufweist. Dieser Basis-Bivektor kommt in der Darstellung ohne imaginäre Einheit i aus, nimmt jedoch die Funktion dieser Einheit wahr, da er sich zu

$$({}_x\,{}_z)^2 = -\mathbf{1} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \{62\}$$

quadriert. Eine geometrische Fundierung imaginärer Größen wurde bereits von Graßmann [7], Clifford [3], Hamilton und anderen [23, S. 77 – 81] diskutiert, wobei Hamilton einer Fußnote von Nahin zufolge bereits die Darstellung in Form von reellen (2x2)-Matrizen wählte [23, Fußnote 13, S. 252].

Mit Hilfe dieser reellwertig belegten (2x2)-Matrizen können nun reellwertig belegte (4x4)-Matrizen konstruiert werden, die dann einer Unteralgebra der Dirac-Algebra entsprechen. Damit wird der Schritt von einer Beschreibung zweidimensionaler Räume durch die insgesamt $2^2 = 4$ Basiselemente {58} bis {61} zu einer Beschreibung vierdimensionaler Räume durch die insgesamt $2^4 = 16$ folgenden Basiselemente gegangen:

a) Dimensionsloser Skalar:

$$\mathbf{E}_{(4\text{-dim})} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \{63\}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{E}_{(4\text{-dim})}^2 = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{64\}$$

b) Basisvektoren:

$${}_v = {}_x \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \{65\}$$

$$\text{mit} \quad {}_v^2 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{66\}$$

$${}_t = {}_z \otimes \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \{67\}$$

$$\text{mit} \quad {}_t^2 = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{-1}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{68\}$$

$${}_x = ({}_z\,{}_x) \otimes {}_x = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \{69\}$$

$$\text{mit} \quad {}_x^2 = \begin{pmatrix}0 & {}_x\\ -{}_x & 0\end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{70\}$$

$${}_z = ({}_z\,{}_x) \otimes {}_z = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \{71\}$$

$$\text{mit} \quad {}_z^2 = \begin{pmatrix}0 & {}_z\\ -{}_z & 0\end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{72\}$$

c) Basis-Bivektoren:

$$\begin{aligned}{}_v\,{}_t &= ({}_x \otimes \mathbf{1})\,({}_z \otimes \mathbf{1}) = ({}_x\,{}_z) \otimes \mathbf{1}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \{73\}\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad ({}_v\,{}_t)^2 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & 0\end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \{74\}$$

$$\begin{aligned}{}_v\,{}_x &= ({}_x \otimes \mathbf{1})\,(({}_z\,{}_x) \otimes {}_x) = -{}_z \otimes {}_x\\ &= \begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \{75\}\end{aligned}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{v}\,{}_{x})^2 = \begin{pmatrix} -\,{}_{x} & 0 \\ 0 & {}_{x} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{76\}$$

$${}_{v}\,{}_{z} = ({}_{x} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z}) = -\,{}_{z} \otimes {}_{z}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{77\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{v}\,{}_{z})^2 = \begin{pmatrix} -\,{}_{z} & 0 \\ 0 & {}_{z} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{78\}$$

$${}_{t}\,{}_{x} = ({}_{z} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{x}) = {}_{x} \otimes {}_{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{79\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{t}\,{}_{x})^2 = \begin{pmatrix} 0 & {}_{x} \\ {}_{x} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{80\}$$

$${}_{t}\,{}_{z} = ({}_{z} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z}) = {}_{x} \otimes {}_{z}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{81\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{t}\,{}_{z})^2 = \begin{pmatrix} 0 & {}_{z} \\ {}_{z} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{82\}$$

$${}_{x}\,{}_{z} = (({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{x})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z})$$

$$= -\mathbf{1} \otimes ({}_{x}\,{}_{z})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{83\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{x}\,{}_{z})^2 = \begin{pmatrix} -\,{}_{x}\,{}_{z} & 0 \\ 0 & -\,{}_{x}\,{}_{z} \end{pmatrix}^2$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{84\}$$

d) Basis-Trivektoren:

$${}_{v}\,{}_{t}\,{}_{x} = ({}_{x} \otimes \mathbf{1})\,({}_{z} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{x})$$

$$= \mathbf{1} \otimes {}_{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{85\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{v}\,{}_{t}\,{}_{x})^2 = \begin{pmatrix} {}_{x} & 0 \\ 0 & {}_{x} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{86\}$$

$${}_{v}\,{}_{t}\,{}_{z} = ({}_{x} \otimes \mathbf{1})\,({}_{z} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z})$$

$$= \mathbf{1} \otimes {}_{z}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \{87\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{v}\,{}_{t}\,{}_{z})^2 = \begin{pmatrix} {}_{z} & 0 \\ 0 & {}_{z} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{88\}$$

$${}_{v}\,{}_{x}\,{}_{z} = ({}_{x} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{x})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z})$$

$$= -\,{}_{x} \otimes ({}_{x}\,{}_{z})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{89\}$$

$$\text{mit}\quad ({}_{v}\,{}_{x}\,{}_{z})^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\,{}_{x}\,{}_{z} \\ -\,{}_{x}\,{}_{z} & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \{90\}$$

$${}_{t}\,{}_{x}\,{}_{z} = ({}_{z} \otimes \mathbf{1})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{x})\,(({}_{z}\,{}_{x}) \otimes {}_{z})$$

$$= -\,{}_{z} \otimes ({}_{x}\,{}_{z})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{91\}$$

$$\text{mit}\quad (\ _v\ _x\ _z)^2 = \begin{pmatrix} -\ _x\ _z & 0 \\ 0 & _x\ _z \end{pmatrix}^2$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{92\}$$

e) Basis-Quadrovektor:

$$_v\ _t\ _x\ _z$$

$$= (\ _x \otimes \mathbf{1})(\ _z \otimes \mathbf{1})((\ _z\ _x) \otimes\ _x)((\ _z\ _x) \otimes\ _z)$$

$$= (\ _z\ _x) \otimes (\ _x\ _z)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{93\}$$

$$\text{mit}\quad (\ _v\ _t\ _x\ _z)^2 = \begin{pmatrix} 0 & _x\ _z \\ -\ _x\ _z & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{94\}$$

Damit bilden diese Basiselemente eine Clifford-Algebra $C\ell_{2,2}$ mit der Signatur (+, +, –, –). Durch Neuzuordnung können diese Basiselemente in eine Clifford-Algebra $C\ell_{3,1}$ mit der Signatur (+, +, +, –) überführt werden, die zur Beschreibung der vierdimensionalen Einsteinschen Raumzeit geeignet ist. Beispielsweise könnte gewählt werden:

$$\begin{aligned} _{vALT} &\to\ _{xNEU} \\ _{tALT} &\to\ _{yNEU} \\ _{vALT}\ _{tALT}\ _{xALT}\ _{zALT} &\to\ _{zNEU} \\ _{zALT} &\to\ _{tNEU} \end{aligned} \qquad \{95\}$$

Mit

$$_{xNEU}^{\ 2} = \ _{yNEU}^{\ 2} = \ _{zNEU}^{\ 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{96\}$$

bzw.

$$_{tNEU}^{\ 2} = -\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{97\}$$

und der Antikommutativität der neuen Basisvektoren von $_{iNEU}\ _{jNEU} = -\ _{jNEU}\ _{iNEU}$ zeigen die neu gebildeten Basisvektoren das gewünschte pseudoeuklidische Verhalten.

Ein Set von Basisvektoren zur Darstellung eines dreidimensionalen euklidischen Raums kann sodann auch mit Hilfe dieser neu gebildeten Basisvektoren {48} konstruiert werden:

$$\begin{aligned} _{xNEU}\ _{tNEU} &\to\ _x' \\ _{yNEU}\ _{tNEU} &\to\ _y' \\ _{zNEU}\ _{tNEU} &\to\ _z' \end{aligned} \qquad \{98\}$$

Damit ergibt sich:

$$_x' = \ _v\ _z = \begin{pmatrix} -\ _z & 0 \\ 0 & _z \end{pmatrix} \qquad \{99\}$$

$$_y' = \ _t\ _z = \begin{pmatrix} 0 & _z \\ _z & 0 \end{pmatrix} \qquad \{100\}$$

$$_z' = \ _v\ _t\ _x\ _z\ _z$$

$$= -\ _v\ _t\ _x = \begin{pmatrix} -\ _x & 0 \\ 0 & -\ _x \end{pmatrix} \qquad \{101\}$$

Diese aus diesen Basisvektoren aufgespannte Unteralgebra der Dirac-Algebra kann jetzt zur Beschreibung eines dreidimensionalen euklidischen Raumes genutzt werden, denn die notwendigen algebraischen Bedingungen von Normierung

$$_x'^2 = \ _v\ _z\ _v\ _z = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{102\}$$

$$_y'^2 = \ _t\ _z\ _t\ _z = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \{103\}$$

$$_z'^2 = (-\ _v\ _t\ _x)(-\ _v\ _t\ _x) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \{104\}$$

und Antikommutatitivät

$$_x'\ _y' = \ _v\ _z\ _t\ _z = -\ _t\ _z\ _v\ _z = -\ _y'\ _x' \ \{105\}$$

$$_y'\ _z' = -\ _t\ _z\ _v\ _t\ _x$$

$$= -(-\ _v\ _t\ _x)\ _t\ _z = -\ _z'\ _y' \qquad \{106\}$$

$$_z'\ _x' = -\ _v\ _t\ _x\ _v\ _z$$

$$= -\ _v\ _z(-\ _v\ _t\ _x) = -\ _z'\ _y' \qquad \{107\}$$

sind erfüllt.

Damit ist das Gedankenspiel beendet. Hätte sich im Laufe der Entwicklung der Mathematik keine so überaus starke Fixierung auf algebraische Beziehungen herausgebildet, sondern wären die geometrischen Aspekte deutlicher in den Vordergrund gerückt, hätten wir heute ein vielleicht anderes konzeptuelles Weltverständnis. Die Schlussfolgerung, dass eine Entwicklung der Mathematik ohne die überaus großen Komplikationen bei Formulierung imaginärer bzw. komplexer Größen möglich gewesen wäre, erscheint so durchaus plausibel. Denn bei einem praktisch-geometrisch motiviertem Herangehen purzeln imaginäre und komplexe Größen ohne allzu großes Zutun, fast schon automatisch, aus den grundlegenden geometrischen Zusammenhängen heraus.

Aus Bequemlichkeit werden wir sicher auch weiterhin mit dem Symbol i arbeiten. Dabei sollten wir uns aber bewusst sein: Es geht auch ohne i, reellwertige Matrizen tun es auch. Und manchmal tun sie es besser, verständlicher und einsichtiger.

9. Literatur

[1] Atiyah, Michael F. (1998): The Dirac equation and geometry. In: Goddard, Peter (Hrsg.): Paul Dirac – The Man and His Work. Cambridge University Press, Cambridge, S. 108 – 124.

[2] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors. Unveränderter Wiederabdruck der englischen Übersetzung, im Original erschienen 1937 unter dem Titel ‚Leçons sur la théorie des spineurs', Dover Publications, New York.

[3] Clifford, William Kingdon (1878): Applications of Grassmann's Extensive Algebra. In: American Journal of Mathematics, 1 (1878), S. 350 – 358.

[4] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Einstein, Albert (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921, Verlag von Julius Springer, Berlin.

[6] Gericke, Helmuth (1992): Mathematik in Antike und Orient / Mathematik im Abendland. Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes. Sonderausgabe in einem Band, Fourier Verlag, Wiesbaden.

[7] Graßmann, Hermann Günther (1844): Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Ersther Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Verlag Otto Wigand, Leipzig.

[8] Gröbner, Wolfgang (1966): Matrizenrechnung, Bibliographisches Institut / Hochschultaschenbücherverlag, Mannheim, Wien, Zürich.

[9] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1175 – 1201.

[10] Hawking, Stephen (2003): Das Universum in der Nußschale. Taschenbuchausgabe auf Grundlage der erweiterten Neuausgabe, Deutscher Taschenbuch Verlag, München.

[11] Henderson, Harold V.; Pukelsheim, Friedrich; Searle, Shayle. R. (1983): On the History of the Kronecker Product. In: Linear and Multilinear Algebra, 14 (1983), S. 113 – 120.

[12] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.

[13] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 104 – 121.

[14] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 691 – 714.

[15] Homeister, Matthias (2008): Quantum Computing verstehen. Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven. 2. aktual. u. durchges. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden.

[16] Horn, Martin Erik (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Schwäbisch Gmünd, Band 29, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin, S. 455 – 457.

[17] Horn, Martin Erik (2011): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom, In: Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, Steve Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin, S. 435 – 450.

[18] Horn, Martin Erik (2011): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Naturwissenschaftliche Bildung als Beitrag zur Gestaltung partizipativer Demokratie, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin, S. 158 – 160.

[19] Horn, Martin Erik (2011): Die fünfdimensionale Raumzeit-Algebra am Beispiel der Kosmologischen Relativität. In Vorbereitung, zur Veröffentlichung vorgesehen in: PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster 2011, Beitrag 17.1.

[20] Kaku, Michio (1999): Hyperspace. A Scientific Odyssey through the 10th Dimension. Reissued as paperback edition in new covers, Oxford University Press, Oxford.

[21] Kaku, Michio; Thompson, Jennifer (1999): Beyond Einstein. The Cosmic Quest for the Theory of the Universe. Reissued as paperback edition in new covers, Oxford University Press, Oxford.

[22] Laughlin, Robert B. (2007): Abschied von der Weltformel. Die Neuerfindung der Physik. 3. Auflage, Piper Verlag, München.

[23] Nahin, Paul J. (2007): An Imaginary Tale. The Story of $\sqrt{-1}$. Fifteenth printing & first paperback printing with a new preface an appendixes by the author, Princeton University Press, Princeton, Oxford.

[24] McMahon, David (2008): Quantum Computing Explained. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

[25] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances of Applied Clifford Algebras, 19 (2009), S. 819 – 834.

[26] Rota, Gian-Carlo (2008): A Mathematician's Gossip. In: Rota, Gian-Carlo: Indiscrete Thoughts. Wiederabdruck der Originalauflage von 1997, Birkhäuser Verlag Boston, Basel, Berlin, Kap. 20, S. 209 – 234.

[27] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.

[28] Steeb, Willi-Hans (1991): Kronecker Product of Matrices and Applications. Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.

[29] Steeb, Willi-Hans; Hardy, Yorick (2004): Problems and Solutions in Quantum Computing and Quantum Information. World Scientific, New Jersey, London, Singapore.

[30] Sträßer, Rudolf; von Aufschnaiter, Claudia (2010): Vom Bildungskanon zu den Bildungsstandards. Assoziationen eines Mathematikdidaktikers mit Zwischenbemerkungen einer Physikdidaktikerin. In: Buschkühle, Carl-Peter; Duncker, Ludwig; Oswalt, Vadim (Hrsg.): Bildung zwischen Standardisierung und Heterogenität – ein interdisziplinärer Diskurs. VS Verlag für Sozialwissenschaften/GWV Fachverlage, Wiesbaden, S. 35 - 51.

[31] Vianna, J.D.M.; Trindade, M.A.S.; Fernandes, M.C.B (2008): Algebraic Criteria for Entanglement in Multipartite Systems. In: International Journal of Theoretical Physics, 47 (2008), S. 961 – 970.

[32] Zehfuss, Johann Georg (1858): Über eine gewisse Determinante. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3 (1858), S. 298 – 301.